

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, den Satz von Erdős und Pósa zu beweisen, dass die Klasse aller Kreise diese Eigenschaft hat. Wir werden also eine Funktion f finden (etwa $4k \log k$), so dass in einem Graphen stets entweder k disjunkte Kreise existieren oder all seine Kreise durch höchstens $f(k)$ Ecken überdeckbar sind.

Dazu zeigen wir zunächst eine stärkere Aussage für kubische Graphen. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$s_k := \begin{cases} 4kr_k & \text{falls } k \geq 2 \\ 1 & \text{falls } k \leq 1 \end{cases} \quad \text{mit } r_k := \log k + \log \log k + 4.$$

Lemma 1.3.1. *Jeder kubische Multigraph mit mindestens s_k Ecken enthält k disjunkte Kreise, für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach k . Für $k \leq 1$ ist die Behauptung klar. Zum Induktionsschritt sei $k \geq 2$, es sei H ein kubischer Multigraph mit $|H| \geq s_k$, und es sei C ein kürzester Kreis in H .

Wir zeigen zunächst, dass $H - C$ eine Unterteilung eines kubischen Multigraphen H' mit $|H'| \geq |H| - 2|C|$ enthält. Es sei m die Anzahl der Kanten von H zwischen C und $H - C$. Da H kubisch ist und $d(C) = 2$, ist $m \leq |C|$. Wir betrachten nun Partitionen von $V(H)$ in zwei Mengen V_1 und V_2 (wobei $V_2 = \emptyset$ erlaubt sei), beginnend mit $V_1 := V(C)$. Hat $H[V_2]$ eine Ecke vom Grad höchstens 1, so schieben wir sie von V_2 nach V_1 und erhalten eine neue Partition $\{V_1, V_2\}$ mit weniger V_1 - V_2 -Kanten. Nehmen wir an, wir können n solche Eckenbewegungen ausführen, aber nicht mehr. (Man kann sich überlegen, dass unsere Annahmen $n \leq 2$ implizieren, was wir aber formal nicht brauchen.) Danach hat $H[V_2]$ nur noch höchstens $m - n$ Ecken vom Grad < 3 , da jede solche Ecke mit einer V_1 - V_2 -Kante inzidiert und H nur noch höchstens $m - n$ solche Kanten hat. Und jede Ecke vom Grad < 3 in $H[V_2]$ hat dort den Grad 2, da wir sie sonst nach V_1 schieben könnten. Es sei H' der aus $H[V_2]$ durch Unterdrückung dieser Ecken entstehende kubische Multigraph. Dessen Ordnung beträgt dann, wie erwünscht,

$$n \leq 3$$

$$|H'| \geq |H| - |C| - n - (m - n) \geq |H| - 2|C|.$$

Zur Vollendung des Induktionsschrittes zeigen wir jetzt $|H'| \geq s_{k-1}$. Da $|C| \leq 2 \log |H|$ ist nach Korollar 0.3.5 (bzw. wegen $|H| \geq s_k$, falls $|C| = g(H) \leq 2$), und da $|H| \geq s_k \geq 6$ ist, haben wir

$$|H'| \geq |H| - 2|C| \geq |H| - 4 \log |H| \geq s_k - 4 \log s_k.$$

(Bei der letzten Ungleichung benutzen wir, dass für $x \geq 6$ die Funktion $x \mapsto x - 4 \log x$ monoton wächst.)

Kantenzusammenhangs von k auf $2k$, um statt irgendwelcher k kantendisjunkter Wege zwischen je zwei Ecken die Existenz k kantendisjunkter Spannbäume zu sichern:

Korollar 1.4.2. *Jeder $2k$ -kantenzusammenhängende Multigraph enthält k kantendisjunkte Spannbäume.*

Beweis. Ist G ein $2k$ -kantenzusammenhängender Multigraph und ist $\{V_1, \dots, V_r\}$ eine Partition von $V(G)$, so führen von jeder Partitionsmenge V_i mindestens $2k$ Kanten zu anderen Partitions Mengen. Somit hat G mindestens $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r 2k = kr$ Partitionskanten. Die Behauptung folgt mithin aus Satz 1.4.1. \square

Zum Beweis der nichttrivialen Richtung von Satz 1.4.1 seien ein Multigraph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir werden folgendermaßen vorgehen. Da wir noch nicht wissen, ob die gewünschten Bäume existieren, beginnen wir mit einer Familie k kantendisjunkter aufspannender Wälder; solche gibt es allemal. Wir wählen unter ihnen F_1, \dots, F_k so, dass $E(F_1 \cup \dots \cup F_k)$ maximal ist. Danach konstruieren wir eine Menge U aus mindestens zwei Ecken, welche in jedem F_i zusammenhängend ist. Ist $U = V$, so sind unsere Wälder F_i bereits Bäume, und wir sind fertig. Ist dagegen $U \subsetneq V$, so kontrahieren wir U und wenden Induktion auf den Multigraphen G/U an. Die sich hieraus ergebenden k Spannbäume von G/U können dann durch die Bäume $F_i[U]$ zu Spannbäumen von G ergänzt werden.

Wie konstruieren wir U ? Aus Gründen, die später klar werden, werden wir uns zunächst eine Menge $U_0 = \{x^*, y^*\}$ zweier Ecken suchen, die in G benachbart sind aber in keinem F_i . Wir möchten, dass diese Ecken in jedem $F_i[U]$ durch einen Weg verbunden sind, aber in $F_i[U_0]$ sind sie es nicht. Also fügen wir Wege hinzu: es sei H_1 die Vereinigung aller Wege $x^*F_iy^*$, einem für jedes i , und $U_1 := V(H_1)$. (Wir werden zeigen müssen, dass diese Wege existieren). Danach sind x^* und y^* in jedem $F_i[U_1]$ verbunden. Allerdings haben wir auch viele neue Eckenpaare, die möglicherweise nicht in jedem $F_i[U_1]$ durch einen Weg verbunden sind. Um auch diese zu verbinden, fügen wir weitere Wege hinzu, erhalten so H_2 und U_2 , und so fort. Da G endlich ist, wird die Folge der U_j schliesslich konstant, und das endgültige U_n ist in jedem F_i zusammenhängend.

Lemma 1.4.3. *Zu jeder Kante $e^* = x^*y^*$ in $E \setminus E(F_1 \cup \dots \cup F_k)$ gibt es eine Menge $U \subseteq V$, die x^* und y^* enthält und für die $F_i[U]$ für jedes $i = 1, \dots, k$ zusammenhängend ist.*

Proof. Es sei $\emptyset = \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_n$ die (eindeutig bestimmte) maximale Folge von Mengen von Wegen, so dass $\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_{\ell-1} \neq \emptyset$ gilt und

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_{\ell-1} \cup \bigcup \{x F_i y \mid xy \in E_{\ell-1}; i = 1, \dots, k\} \quad (1)$$

24. Es sei $G = G_1 \cup G_2$ mit $|G_1 \cap G_2| \leq 1$. Zeige, dass $\mathcal{C}(G)$ genau dann eine schlichte Basis hat, wenn $\mathcal{C}(G_1)$ und $\mathcal{C}(G_2)$ eine haben.
25. Finde unter den Gebietsrändern eines 2-zusammenhängenden ebenen Graphen eine Basis seines Zyklenraumes.
- 26.⁺ Finde einen algebraischen Beweis der Eulerformel für 2-zusammenhängende ebene Graphen, wie folgt. Definiere den *Gebietsraum* \mathcal{F} (über \mathbb{F}_2) eines solchen Graphen analog zum Eckenraum \mathcal{V} und Kantenraum \mathcal{E} . Definiere *Randhomomorphismen* $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$, durch Festlegung zunächst der Bilder einzelner Gebiete bzw. Kanten (dh. von Elementen der Standardbasen von \mathcal{F} und \mathcal{E}), gefolgt von linearen Fortsetzungen dieser Teilabbildungen auf ganz \mathcal{F} und \mathcal{E} . Bestimme die Bilder und Kerne dieser Homomorphismen, und leite die Eulerformel aus den Dimensionen dieser Unterräume von \mathcal{F} , \mathcal{E} und \mathcal{V} her.

Eine Familie von Kreisen in einem Graphen G ist eine *doppelte Kreisüberdeckung* von G , wenn jede Kante von G auf genau zweien dieser Kreise liegt.

27. Der Zyklenraum eines 2-zusammenhängenden Graphen G sei erzeugt durch eine schlichte Menge \mathcal{B} von Kreisen. Aus dem Satz von MacLane wissen wir, dass $\mathcal{C}(G)$ sogar eine doppelte Kreisüberdeckung besitzt: durch die Gebietsränder in einer beliebigen Zeichnung von G . Zeige direkt (ohne MacLane), dass \mathcal{B} zu einer doppelten Kreisüberdeckung \mathcal{D} von G ergänzbar ist.
- 28.⁺ (für Topologen) Beweise die nicht-triviale Richtung des Satzes von MacLane direkt konstruktiv, wie folgt. OBdA sei G 2-zusammenhängend. Hat $\mathcal{C}(G)$ eine schlichte Basis, so existiert nach der vorigen Übung eine doppelte Überdeckung von G durch eine Familie \mathcal{D} von Kreisen, die ganz $\mathcal{C}(G)$ erzeugen. Für jeden Kreis $C \in \mathcal{D}$ klebe eine Kreisscheibe an G durch (injektive) Identifikation ihres Randes mit C .
- Zeige, dass der so entstehende topologische Raum eine Fläche ist, dh. eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand.
 - Zeige mit Satz Theorem 0.9.5, dass diese Fläche eine Euler-Charakteristik ≥ 2 hat. (Hieraus folgt, dass sie die Sphäre S^2 sein muss; dies darf ohne Beweis verwendet werden.)
29. Leite aus den letzten beiden Übungen her, dass es für plättbare 2-zusammenhängende Graphen G zu jeder Basis \mathcal{B} von $\mathcal{C}(G)$ aus Kreisen eine Zeichnung gibt, in der genau die Kreise aus \mathcal{B} die Innengebiete beranden.
- 30.⁺ Es sei C eine geschlossene Kurve in der Ebene, die sich an jedem Punkt der Ebene höchstens einmal selbst kreuzt und sich nirgendwo selbst berührt, ohne sich zu kreuzen. Wir nennen C *alternierend*, wenn wir die Kreuzungen so in Über-/Unterführungen verwandeln können, dass beim Durchlaufen entlang C die Überführungen mit den Unterführungen abwechseln.
- Beweise oder widerlege, dass jede solche Kurve C alterniert.
 - Ändert sich die Lösung von (i), wenn die Kurve C nicht geschlossen ist?

zu jeder schlichten Basis

Unser nächstes Ergebnis nutzt die Ideen des Beweises von Proposition 8.1.2 zur Etablierung einer lokalen hinreichenden Gradbedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises – ein ganz erheblicher Fortschritt gegenüber dem Satz von Dirac und einer Reihe ähnlicher Sätze:

Theorem 8.1.3. (Asratian & Khachatryan 1990)

Ein zusammenhängender Graph mit mindestens 3 Ecken ist hamiltonsch, wenn

$$d(u) + d(w) \geq |N(\{u, v, w\})| \qquad \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)|$$

gilt für jeden induzierten Weg uvw .

Beweis. Betrachten wir zunächst irgendeinen induzierten Weg uvw in G . Wegen $d(u) + d(w) = |N(u) \cup N(w)| + |N(u) \cap N(w)|$ impliziert unsere Gradannahme, dass

$$|N(u) \cap N(w)| \geq |N(v) \setminus N(\{u, w\})| \geq |\{u, w\}| \geq 2. \quad (1)$$

Insbesondere enthält G einen Kreis.

Es sei C ein längster Kreis in G . Wir nehmen an, C sei kein Hamiltonkreis, wählen eine Ecke $u \notin C$ mit einem Nachbarn auf C , und setzen $V := N(u) \cap V(C)$. Für Ecken $v \in V$ bezeichne v^+ den Nachfolger von v auf C gemäß einer fest gewählten Orientierung von C , und es sei $V^+ := \{v^+ \mid v \in V\}$.

Da C ein längster Kreis ist, gilt $V \cap V^+ = \emptyset$, sowie:

Keine zwei Ecken aus $V^+ \cup \{u\}$ sind benachbart oder haben einen gemeinsamen Nachbarn außerhalb von C . (2)

(Vergleiche Abbildung 8.1.2.) Insbesondere sind alle Wege der Form uvv^+ induziert. Mit (1) folgt daher für alle $v \in V$:

$$|N(u) \cap N(v^+)| \geq |N(v) \setminus N(\{u, v^+\})| \geq |N(v) \cap V^+| + 1;$$

die letzte Gleichheit rührt daher, dass wegen (2) weder u noch die Ecken aus V^+ in $N(\{u, v^+\})$ liegen können. Die Anzahl $\|V, V^+\|$ der V - V^+ -Kanten von G erfüllt daher die folgende widersprüchliche Abschätzung:

$$\|V, V^+\| = \sum_{v \in V} |N(v) \cap V^+| \leq \sum_{v \in V} (|N(u) \cap N(v^+)| - 1) \stackrel{(2)}{=} \|V, V^+\| - |V|;$$

das in der letzten Gleichheit relevante \leq rührt daher, dass v^+ wegen (2) gemeinsame Nachbarn mit u nur in V haben kann. \square